

決定理論における利失・後悔と選択基準に関する一考察

甲南大学大学院 吉川 歩

利失表を用いた意思決定問題の代替案選択方法として決定理論が利用されている。本稿ではまず①従来から利用されている2種の利失・後悔に加え、新たに3種の利失・後悔を提案する。次に5種の利失・後悔と5種の選択基準の25種の組合せについて、②得られる結果が同一となる冗長な条件と③適切な代替案の選択を阻害する条件を明らかにする。また④利失に損失が含まれている場合に代替案の選択を回避する手法を提案する。

A New Approach to Payoffs, Regrets and Selection Criteria in Decision Theory

Graduate school, Konan University Ayumi YOSHIKAWA

Abstract: Decision theory with a payoff matrix is useful for selecting an alternate under an uncertain state. In this paper, we first define one payoff and two regrets in addition to the payoff and the regret already used as the payoff matrices. Next we compare all 25 pairs of the five selection criteria and the five payoffs and regrets. Then we show redundant pairs that are obtained same results. Also, we reveal cases in which selection criteria do not work appropriately. Moreover, when some alternates take negative values in a payoff matrix, we propose a method for avoiding those alternates.

Keywords: decision theory, payoff matrix, selection criteria, regret, payoff with negative value

1 研究目的

研究背景 経営戦略の選択などの意思決定の特徴は、想定される複数の将来の状況の下で、状況が確定する前に複数の代替案からもっとも有効と判断されるものを選択せざるをえない点にある。よく知られているように代替案を評価する手法として利失表を用いた決定理論が利用されている[1, 2, 3]。しかしながら、これまで利失表でよく用いられている利失・後悔は利用可能なもののうちの一部である[4, 5, 6]。

研究目的 本稿では続く2章で従来の利失・後悔と選択基準を概説した後、3章でまず新たに3種の利失・後悔の定義を提案する。そして4章で従来から利用されている利失・後悔も加えた5種の利失・後悔と5種の選択基準の合計25種の組合せについて、異なる組合せから得られる代替案の選択結果が等しくなる冗長な条件を明らかにする。また代替案の適切な選択を阻害する条件も合わせて示す。さらに5章で利

失に損失が含まれている場合に代替案の選択を回避するための方法についても提案する。

2 従来の利失・後悔と選択基準

利失表の記法 まず本稿で用いる利失表の記法について触れておく。 m 個の将来の不確定な状況を $s_j (j = 1, \dots, m)$ とする。それに対して n 個の取りうる代替案を $a_i (i = 1, \dots, n)$ とする。各状況 s_j のもとで a_i を採用した時に得られる利失すなわち結果の推定値を c_{ij} とする。よってこの意思決定問題の利失表は表1のように表せる。また各状況 s_j の生起確率を p_j と

表1: 本稿で用いる利失表

状況		s_1	...	s_j	...	s_m
生起確率		p_1	...	p_j	...	p_m
代替案	a_1	c_{11}	...	c_{1j}	...	c_{1m}
	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\ddots	\vdots
	a_i	c_{i1}	...	c_{ij}	...	c_{im}
	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\ddots	\vdots
	a_n	c_{n1}	...	c_{nj}	...	c_{nm}

する。

後悔 代替案選択での後悔 r_{ij} は代替案選択後に状況が確定したとき、最良の代替案と選択した代替案の結果の差異として(1)式で定義される。

$$r_{ij} = c_{ij} - \max_{i=1, \dots, n} c_{ij} \quad (1)$$

選択基準の大別 利失・後悔から代替案の選択に用いられる選択基準は①生起確率を利用する期待値基準、Laplace基準、②最小値、最大値に着目するマクシマックス基準、マクシミン基準、Hurwicz基準の2種に分類できる。また以下で示すように、Laplace基準は期待値基準、マクシマックス基準およびマクシミン基準はHurwicz基準に含まれる。なお本稿では、各選択基準の定義あるいは性質の説明の際に、対象となる利失あるいは後悔を区別して取り扱う必要がない場合には一般化して“ $*_{ij}$ ”と表す。

期待値基準 状況 s_j の生起確率 p_j が推測できるとき、各代替案 a_i を期待値により比較し、最大となる代替案 a_i を採択する方法である。

$$\max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^m p_j \cdot *_{ij} \quad (2)$$

Laplace基準 各状況 s_j が等確率で発生するとみなし($p_j = 1/m$)、期待値基準を適用する方法である。

$$\max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^m \frac{*_{ij}}{m} \quad (3)$$

マクシマックス基準 代替案 a_i ごとに状況 s_j 間で利失・後悔 $*_{ij}$ の最大値を求め、代替案間で最大となる代替案 a_i を採択する方法である。

$$\max_{i=1, \dots, n} \cdot \max_{j=1, \dots, m} *_{ij} \quad (4)$$

マクシミン基準 代替案 a_i ごとに状況 s_j 間で利失・後悔 $*_{ij}$ の最小値を求め、代替案間で最大となる代替案 a_i を採択する方法である。

$$\max_{i=1, \dots, n} \cdot \min_{j=1, \dots, m} *_{ij} \quad (5)$$

Hurwicz基準 楽観度係数 $\alpha(0 \leq \alpha \leq 1)$ を導入し、代替案 a_i ごとに利失・後悔 $*_{ij}$ の最大値の α 倍と最小値の $(1-\alpha)$ 倍の和を求め、代替案間で最大となる代替案 a_i を採択する方法である。 α が1のときは(4)式の

マクシマックス基準、0のときは(5)式のマクシミン基準に一致する。

$$\max_{i=1, \dots, n} \left\{ \alpha \cdot \max_{j=1, \dots, m} *_{ij} + (1-\alpha) \min_{j=1, \dots, m} *_{ij} \right\} \quad (6)$$

3 提案する利失・後悔

提案の基本方針 吉川は代替案 a_i ごとの評価値 e_i 間の比較に、ミニミン基準： $\min_{i=1, \dots, n} \cdot \min_{j=1, \dots, m} *_{ij}$ のような最小値演算を用いる方法を試みている[4]。しかし最小となる代替案 a_i を選ぶ合理的な根拠は見当たらないことから、本稿でも代替案 a_i の評価値 e_i 間の比較演算は最大値演算のみを用いる。したがって本稿で扱う対象は、新しい利失・後悔を提案し、それらを従来の選択基準と組み合わせる方法を考察することである。以下では新しい利失として状況内順位 o_{ij} 、また新しい後悔としてレンジ補正後悔 q_{ij} および最大値補正後悔 w_{ij} をそれぞれ提案する。

状況内順位 代替案 a_i を決定する際には状況 s_j が変化してもできるだけよい結果が得られる選択をしたい。この要請は(1)式の後悔 r_{ij} を利用した選択基準で従来は扱われてきた。本稿では「選び損なってもマシ」ではなく、想定した状況と異なったとしても良好な選択となることを積極的に表す量を状況内順位 o_{ij} と呼び、(7)式で定義する。

$$o_{ij} = \begin{cases} 1 & c_{ij} = \max_{i=1, \dots, n} c_{ij} \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad (7)$$

(7)式は状況 s_j 内で各代替案 a_i が最良案であるかを定量化している。

レンジ補正後悔 例えば状況 s_1 の代替案 $\{a_1, a_2, a_3\}$ に対応する利失 c_{i1} が順に $\{20, 10, 0\}$ 、 s_2 に対する c_{i2} が順に $\{0, 100, 400\}$ であったとする。このとき後悔 r_{i1} は(1)式より $\{0, -10, -20\}$ 、同様に r_{i2} は $\{-400, -300, 0\}$ と計算できる。例えばこれらに(5)式のマクシミン基準を適用すると評価値 e_i は $\{-400, -300, -20\}$ となり、代替案 a_3 が選ばれる。しかし状況ごとの c_{ij} のレンジを比較すると s_1 の20に対し、 s_2 は400であり、レンジに大きな差がある。こ

のようにレンジに大きな差がある場合、選択基準との組合せによっては事実上単独の状況の後悔のみによって代替案が選択されてしまうこともある。そこで利失 c_{ij} のレンジの影響を補正したレンジ補正後悔 q_{ij} を(8)式で与える。

$$q_{ij} = \frac{r_{ij}}{\max_{i=1, \dots, n} c_{ij} - \min_{i=1, \dots, n} c_{ij}} \quad (8)$$

先の例に(8)式を適用すると q_{i1} と q_{i2} はそれぞれ $\{0, -0.5, -1\}$ と $\{-1, -0.75, 0\}$ となる。これらに先と同様(5)式を適用すると評価値 e_i は $\{-1, -0.75, -1\}$ となるため、代替案 a_2 が選ばれる。

最大値補正後悔 補正後悔としては(8)式のレンジで補正を行うもの以外に最大値で補正する方法も考えられる。状況 s_1 と s_2 の最大値がそれぞれ1000と20であったとき、例えば s_1 の最大値1000に対する990と s_2 の最大値20に対する10はどちらも差、すなわち後悔が10として扱われる。しかしながら前者はほぼ同じで後者は差があると扱う方が適切な場合もある。そこで c_{ij} の最大値を考慮した最大値補正後悔 w_{ij} を(9)式で与える。

$$w_{ij} = \frac{r_{ij}}{\max_{i=1, \dots, n} c_{ij}}, \quad \text{ただし } \max_{i=1, \dots, n} c_{ij} > 0 \quad (9)$$

ただし状況 s_j ごとの最大値 $\max_{i=1, \dots, n} c_{ij}$ で割るため、すべての最大値が正でなければならない。先の例では前者の差-10は-0.01、後者の差-10は-0.5と換算され、重みの違いが明確になる。

4 選択基準間の冗長性と代替案の選択阻害条件

扱う問題点 2章と3章より、利用できる利失・後悔は5種、選択基準は5種である。これより25種の組合せが代替案の選択に利用可能である。ここで問題となるのは、これらの25種の手法から得られる選択結果の冗長性である。つまり利用可能な手法は増えたものの、得られる結果が複数の手法の間で同一であるのならば冗長性が増加したに過ぎない。まず得られる結果が一致する組合せを明らかにすることが必要となる。またそれに加えて利失・後悔が特定の性

質を有するとき代替案の選択が適切に行えない場合がある。したがって先の問題に加えて代替案の選択を阻害する利失表の条件についても明らかにすることも重要である。よって扱う問題をまとめると次の2点となる。

- I 代替案の選択結果が一致する利失・後悔と選択基準の冗長な組合せ
- II 代替案の適切な選択を阻害する利失・後悔の特徴

4.1 利失・後悔と選択基準間の冗長性

冗長性の考え方 利失表と(2)から(6)式の選択基準を組合せて代替案を選択するときには、各代替案 a_i の評価値 e_i を最大値演算で比較する。このとき利失・後悔と選択基準の異なる組合せの間で、それらから得られる評価値 e_i の最大値を与える代替案 a_i が常に一致する場合が冗長とみなせる。本稿ではこれを広義の冗長性と呼ぶ。また単に最良案だけでなく、代替案の評価値 e_i の値や順序の情報も得たいときもある。この場合は利失・後悔と選択基準の異なる組合せの間で、得られる評価値 e_i の順序あるいは値が常に一致する場合が冗長とみなせる。本稿ではこれを狭義の冗長性と呼ぶ。以下では後者の狭義の冗長性について考察した後、広義の冗長性に緩和して考察を行う。

2種の冗長性 選択基準から計算される代替案ごとの評価値 e_i の順序あるいは値が一致してしまうケースには、(A)解析的に一致する場合と(B)数値的に一致する場合に大別できる。前者はさらに(a)条件によらず一致する場合と(b)一定の条件を満たす場合に一致する場合に細分できる。以下ではそれぞれが生じる条件を示す。

条件によらず解析的に一致 この分類に該当する組合せは常に冗長であり、いずれか一方の評価を行えばよい。以下の組み合わせが該当する。

- ① 利失 c_{ij} と後悔 r_{ij} の期待値基準および Laplace

基準

- ② 後悔 r_{ij} , 状況内順位 o_{ij} , レンジ補正後悔 q_{ij} , 最大値補正後悔 w_{ij} に対するマクシマックス基準

利失 c_{ij} と後悔 r_{ij} の期待値基準およびLaplace基準
この条件は中村[2]が指摘しているものである。ある代替案 a_i に対する後悔期待値基準の評価値 e_i は(2)式から(10)式の第2式となる。

$$e_i = \sum_{j=1}^m p_j \cdot r_{ij} = \sum_{j=1}^m p_j \cdot c_{ij} - \sum_{j=1}^m p_j \cdot \max_{i=1, \dots, n} c_{ij} \quad (10)$$

後悔 r_{ij} の定義(1)式から利失 c_{ij} で書き直すと第3式のようになる。ここで(10)式の第3式の第2項は i によらず一意であるため、後悔の期待値基準は利失の期待値基準にバイアス項が加わったにすぎない[7]。またLaplace基準も期待値基準に包含されるため、同様の結果となる。なお順位、値で一致するため狭義の冗長性となる。

後悔 r_{ij} , 状況内順位 o_{ij} , レンジ補正後悔 q_{ij} , 最大値補正後悔 w_{ij} に対するマクシマックス基準 利失 c_{ij} を除く他の利失・後悔は定義に状況 s_j ごとの利失 c_{ij} の最大値 $\max_{i=1, \dots, n} c_{ij}$ から偏差を利用している。そのためマクシマックス基準を適用する際の評価値 e_i の演算

$$e_i = \max_{j=1, \dots, m} *_{ij}$$

で状況内順位の最大値“1”, 3種の後悔の最大値“0”を与える代替案 a_i は常に一致する。なお最大値以外の評価値 e_i の順位は利失・後悔により異なる場合があるため狭義の冗長性は満たされない。

一定の条件を満たす場合に解析的に一致 この分類に該当する組合せは利失・後悔が一定の条件となった場合に、いずれか一方の評価を行えばよい。該当するものとしては次のようなものがある。

- ③ 利失 c_{ij} の各状況 s_j の最大値 $\max_{i=1, \dots, n} c_{ij}$ がすべて等しい場合、利失 c_{ij} , 後悔 r_{ij} , 最大値補正後悔 w_{ij} に同じ選択基準を用いた評価値の順位が一致
- ④ 利失 c_{ij} の各状況 s_j の最大値と最小値の差 $\max_{i=1, \dots, n} c_{ij} - \min_{i=1, \dots, n} c_{ij}$ がすべて等しい場合、後

悔 r_{ij} とレンジ補正後悔 q_{ij} に同じ選択基準を用いた評価値の順位が一致

- ⑤ 利失 c_{ij} の各状況 s_j の最大値がすべて等しくかつ最小値もすべて等しい場合、すべての利失・後悔に状況内順位 o_{ij} を除く同じ選択基準を用いた評価値の順位が一致

上記の③から⑤の各条件を考えると利失 c_{ij} の最大値, 最小値および両者の差をそれぞれ

$$\max_{i=1, \dots, n} c_{ij} = \beta_j, \quad \min_{i=1, \dots, n} c_{ij} = \gamma_j, \quad \beta_j - \gamma_j = \delta_j$$

と表す。そうすると後悔 r_{ij} , レンジ補正後悔 q_{ij} , 最大値補正後悔 w_{ij} は(1), (8), (9)式より, それぞれ

$$r_{ij} = c_{ij} - \beta_j, \quad q_{ij} = \frac{r_{ij}}{\beta_j - \gamma_j} = \frac{r_{ij}}{\delta_j}, \quad w_{ij} = \frac{r_{ij}}{\beta_j}$$

と表すことができる。またそれぞれが状況 s_j によらず一定となることを定数 $K_\beta, K_\gamma, K_\delta$ を使って

$$\beta_j = K_\beta, \quad \gamma_j = K_\gamma, \quad \delta_j = K_\delta$$

のように表すと, 例えば③の条件は

$$r_{ij} = c_{ij} - K_\beta, \quad w_{ij} = \frac{r_{ij}}{K_\beta}$$

と書き換えることができる。これより利失 c_{ij} に定数を加えたもの, さらにそれを定数で割ったものになっているため, 同じ選択基準を適用した場合の評価値の順位が一致することがわかる。残りの④から⑤の条件も同様にして導くことができる。

数値的に一致する場合 前述の解析的に一致する場合は定義式から複数の組合せで評価値の順位が一致する条件を導くことができた。しかしながらそれらの条件を満たさない場合でも数値的に複数の組合せで評価値の順位が一致する場合がある。異なる利失・後悔に同じ選択基準を適用した結果が一致するケースを予め検出することで無駄な評価を回避できる。この検出法として次の方法が利用できる。

- ⑥ 利失・後悔を1次元化して順位相関係数を算出

⑥の条件は, 先に示した③から⑤の条件を一般化したものとなっている。なお相関係数の算出に順位相関係数を用いるのは, 異なる利失・後悔の間に線形関

係がある必要はなく、単調性があれば十分であることによる。したがって“kendall”あるいは“spearman”の順位相関係数が1となれば、いずれか一方の利失・後悔のみを利用すればよい。

4.2 代替案の選択を阻害する条件

代替案の選択を阻害する利失・後悔の条件 4.1では利失・後悔と選択基準の異なる組合せから同じ代替案が選択される問題について示した。それとは別に、利失・後悔が特定の特徴を有する場合には評価値 e_i が等しくなり代替案が選択できなくなる場合がある。これには次のような条件が該当する。

- ① 各代替案 a_i の利失・後悔の最大値 $\max_{j=1, \dots, m} *_{ij}$ がすべて等しいとき、マクシマックス基準で代替案を選択不能
- ② 各代替案 a_i の利失・後悔の最小値 $\min_{j=1, \dots, m} *_{ij}$ がすべて等しいとき、マクシミン基準で代替案を選択不能
- ③ 各代替案 a_i の利失・後悔の最大値がすべて等しく、かつ最小値もすべて等しいとき、Hurwicz基準で代替案を選択不能
- ④ 各代替案 a_i の利失・後悔の総和 $\sum_{j=1}^m *_{ij}$ がすべて等しいとき、Laplace基準で代替案を選択不能
- ⑤ 各代替案 a_i の利失 c_{ij} に状況 s_j 内の最小値 $\min_{i=1, \dots, n} c_{ij}$ が少なくとも1つ存在するとき、レンジ補正後悔 q_{ij} ではマクシミン基準で代替案を選択不能
- ⑥ 状況内順位 o_{ij} ではマクシミン基準で代替案を選択不能

①から④の各条件はそれぞれの選択基準の定義の(3)式から(6)式より直ちに導かれる。⑤の条件はレンジ補正後悔 q_{ij} は定義より必ず $-1 \leq q_{ij} \leq 0$ となるため、最小値が少なくとも1つ存在すればマクシミン基準の各代替案の評価値は-1となってしまうためである。また⑥の条件は状況内順位 o_{ij} の定義より最大値以外の利失に対しては0となるためである。マクシミン基準での評価値がすべて0でなければどの状

表 2: 代替案選択の冗長性と阻害条件：表内の数字は前掲の各条件を表す

	c_{ij}	o_{ij}	r_{ij}	q_{ij}	w_{ij}	$*_{ij}$
Maxi-max		②	②	②	②	①
Maxi-min		⑥		⑤		②
Hurwicz						③
期待値	①		①			
Laplace	①		①			④
選択基準共通	③⑤		③④⑤	④⑤	③⑤	⑥

況でも最大値となる代替案が存在することになる。

冗長条件および阻害条件のまとめ 以上の結果をまとめると表2のようなになる。なお紙幅の都合上、表2の各条件に対する c_{ij} の例などは続稿に譲る。

5 利失に損失が混在する場合

代替案選択の必然性 意思決定で考慮すべき条件として代替案選択の必然性がある。つまり利失表がどのようなものであれ、必ずいずれかの代替案を選択せざるをえないのか、あるいは場合によっては選択しないという意思決定が認められているのかである。前者の場合はここまで提案してきた手法により選択すればよい。ここでは後者でかつ利失に損失が混在する場合について考察する。

利失に損失が存在する場合 意思決定に用いる利失表に負値で表される損失が存在する場合は将来の状況によっては代替案を実行することにより損失が生じる可能性があることを示している。この場合「損失が生じる可能性があるならばどの代替案も選択しない」という結論に至ることもある。ただ表1の利失表では「どの代替案も選択しない」という案は導かれない。そこで「どの代替案も選択しない」を表すための方法として、表1の利失表にすべての状況 s_j に対して利失が0、つまり $j = 1, \dots, m$ について $c_{0j} = 0$ となるダミーの代替案 a_0 を追加する。ここでダミーを加えた利失を c'_{ij} 、ダミーを加えた利失 c'_{ij} から得られる利失・後悔を $*'_{ij}$ で表す。

代替案非選択が機能する条件 上述の非選択の代替案 a_0 が選択される評価値の条件は $i = 1, \dots, n$ に対

して、期待値基準 (*Laplace*基準を含む) の場合(11)式が、*Hurwicz*基準 (マクシマックス基準, マクシミン基準を含む) の場合(12)式が成立することである。

$$\sum_{j=1}^m p_j \cdot *'_{ij} < \sum_{j=1}^m p_j \cdot *'_{0j} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \alpha \cdot \max_{j=1, \dots, m} *'_{ij} + (1 - \alpha) \cdot \min_{j=1, \dots, m} *'_{ij} \\ & < \alpha \cdot \max_{j=1, \dots, m} *'_{0j} + (1 - \alpha) \cdot \min_{j=1, \dots, m} *'_{0j} \end{aligned} \quad (12)$$

例えば(11)式の“*’_{ij}”を“c’_{ij}”とすると、利失を用いた期待値基準となり

$$\sum_{j=1}^m p_j \cdot c'_{ij} < 0 \quad (13)$$

のように利失の期待値がすべて負が条件であることがわかる。また“*’_{ij}”を“r’_{ij}”, $\alpha = 0$ とすると後悔マクシミン基準となり

$$r_{0j} = c_{0j} - \max_{i=0, \dots, n} c_{ij} = - \max_{i=0, \dots, n} c_{ij}$$

および

$$\min_{j=1, \dots, m} r_{0j} = - \max_{j=1, \dots, m} \cdot \max_{i=0, \dots, n} c_{ij}$$

を利用すれば、

$$\min_{j=1, \dots, m} r_{ij} < - \max_{j=1, \dots, m} \cdot \max_{i=0, \dots, n} c_{ij} \quad (14)$$

の条件が導ける。

代替案非選択の応用 なお本稿では損益が均衡する0を閾値として利用したが、追加するダミーの利失を任意の値とすることで、例えば“ $c_{0j} = c$ ”ならば「利益がc円以下であれば代替案を選択しない」のような条件付けも可能である。

6 まとめ

得られた結果 決定理論で用いられる利失・後悔および選択基準について、状況内での順位に着目した順位量を用いる選択基準、後悔に*Hurwicz*基準を適用する選択基準、レンジおよび最大値で補正した後悔を利用する選択基準を提案し、それらの特徴を示した。また利失・後悔と選択基準の組合せ間が冗

長となる条件と適切な代替案の選択を阻害する条件を明らかにした。さらに利失に損失が含まれていて代替案の選択が必須でない場合、いずれも選択しないことをダミー代替案を用いて実現する方法についても示した。

参考文献

- [1] 木下栄蔵：わかりやすい意思決定論入門, pp.5-9, 近代科学社, 1996
- [2] 中村雅章：経営意思決定手法の基礎, pp.147-155, 同友館, 1997
- [3] 飯田耕司：意思決定分析の理論, pp.153-158, 三恵社, 2005
- [4] 吉川 歩：利失表を用いた決定理論における選択基準の比較, 第50回日本経営システム学会全国研究発表大会講演論文集, pp.32-35, 2013
- [5] 吉川 歩：利失表を用いた決定理論の選択基準に関する考察, 第29回ファジィシステムシンポジウム講演論文集, pp.153-156, 2013
- [6] 吉川 歩：利失表を用いた決定理論に関する一考察, 甲南会計研究, Vol.8, pp.87-100, 2014
- [7] 吉川 歩：利失表を用いた決定理論に関する一考察, 第52回日本経営システム学会全国研究発表大会講演論文集, pp.36-39, 2014
- [8] 吉川 歩, 吉川奈緒子：利失表を用いた決定理論の選択基準間の関係, 甲南大学情報教育研究センター紀要, No.14, pp.53-65, 2015