日本ファジィ学会誌 Vol.4, No.1, pp.150-159 (1992)

論文

Between集合の数学的性質†

吉川 歩*

工学分野などで言葉を使って対象を表現するためには，言葉に存在する意味の境界の不明瞭さと言葉の離散性を扱うことができなければならない．前者はファジィ集合を使って表現することができるが，後者については有効な手法を模索している段階である．

本論文は言葉の離散性を扱う上で重要な意味をもつ二つのファジィ集合の“間”を表す集合の定義を与えることを目的とする．まず“間”の集合を求める元となるファジィ集合や全体集合の満たすべき条件を明かにした後，“間”を表現する集合(Between集合と呼ぶ)を二つのファジィ集合の所属度の差の絶対値を1から減じたものとして定義する．そしてこのBetween集合が凸性や要素に関する高い表現力などの応用上も優れた性質をもつことを示す．さらにシミュレーションにより他の演算から得られる“間”の集合との比較を行い，本提案のBetween集合の特長を示す．

キーワード：言葉の離散性，ファジィ集合，全順序集合，“間”の表現，Between集合

1. まえがき

我々が使っている言葉には大きく分けて二つのあいまいさが存在する[1].一つはある言葉が指し示す意味の境界に存在する不明瞭さ(vagueness)である．これは本来連続である対象を，意味が似たものを一つの言葉に対応させる分節化作用により離散化したために生じたものである．もう一つのあいまいさは，同じ言葉が異なる複数の意味を表すことつまり多義性(ambiguity)である．これは記号(ラベル)としての言葉が有限であるために生じる．言葉をさまざまな分野に応用する際に問題となるのは前者であるが，ファジィ集合の導入によってそれを表現することが可能となった[2].

ファジィ集合による意味の不明瞭さの表現があまりに画期的過ぎたためか，その陰に隠れて見過ごされがちなのが言語の離散性に伴う問題である．分節化作用は人間の思考を助ける有効な手段であることには違いないが，反面表現したい対象が言葉と言葉の“間(あいだ)”にある場合には一つの最適な言葉が得られないという欠点もある．従って“間”の表現は言葉を応用に用いる際に避けて通れない重要な問題であるといえる．

また“間”の表現を意味の変化(とくにshift)やあるいは語彙の豊富化という言語学的な立場からみると，それを新しい言葉が固有の名称を得るまでの前段階として捉えることができる[3].以上見てきたように“間”をどのように扱うかという問題は重要であることがわかる.しかしながら,“間”をどのようにに表現するかあるいはその表現されたものがどのような性質をもつかについてはほとんど検討されていない．

そこで本論文では二つのファジィ集合の“間”を表す集合の一つとしてそれらの所属度の差をもとに定義されるBetween集合を提案する.そしてBetween集合を定義する際に全体集合や元となるファジィ集合が満たすべき条件とBetween集合のもつ数学的な性質について明かにする．さらに他の演算による“間”の表現との比較からBetween集合のもつ特徴を述べる．

† Mathematical Properties of "Between Sets"
Ayumi YOSHIKAWA

* 京都工芸繊維大学大学院 工芸科学研究科
Graduate School, Kyoto Institute of Technology

2. Between集合の定義

2.1 Between集合を定義するための準備

Between集合を定義する準備として，それを合成する元となるファジィ集合や全体集合の満たすべき条件について述べる．これらの条件が現実の状況に対応づけて説明できるものでないと，実際の問題が条件を満たさず適用できないことになる．また満たすべき条件があまりに多いと適用範囲を狭めることになる．これらを考慮して**表1**に示した三つの条件を設けた．

表1 全体集合および元となるファジィ集合の満たすべき条件

	内容
条件1	全体集合の性質および元となるファジィ集合の形状 1)全体集合上の要素間には全順序関係が存在する 2)ファジィ集合は凸型に限定する 3)ファジィ集合は既知でなければならない
条件2	ファジィ集合の大小関係の定義 $A \leq B$ iff $A \vee B = B,\ A \wedge B = A$
条件3	以上集合と以下集合の導入 AをA以下集合で，BをB以上集合で置換($A \leq B$)

【条件1】には全体集合の性質とファジィ集合の形状に関する二つの計三つのものが含まれている．1)は全体集合上の要素間には全順序関係が存在するというものである．つまり任意の二つの要素の間には必ず大小関係が定められることを意味している．次に2)は対象とするファジィ集合は凸型に限定するというものである．

$$\mu(x_3) \geq \mu(x_1) \wedge \mu(x_2) \quad (1)$$

ただし　$x_1 < x_3 < x_2 \in X$(全体集合)

これは1章で述べた言葉のもつあいまいさのうち境界の不明瞭さだけを扱うことに相当する．また広い意味で凸型には単調増加型あるいは減少型のものも含める．そして3)にはBetween集合を合成する元になるファジィ集合は既知でなければならないということを挙げた．“間”が二つの集合から導かれる相対的な関係であるため，元のファジィ集合が既知でなければそれから導かれたものが意味をもたないことは容易に理解できる．

【条件2】はファジィ集合の大小関係の定義に関するものである．ある二つのファジィ集合A,Bの間の大小関係をファジィ数の上限∨，下限∧の演算[4]を使って(2)式のように定義する．

$$A \leq B \quad \text{iff} \quad A \vee B = B,\ A \wedge B = A \quad (2)$$

$$[A_\alpha^L,\ A_\alpha^R] \vee [B_\alpha^L,\ B_\alpha^R] = [A_\alpha^L \vee B_\alpha^L,\ A_\alpha^L \vee B_\alpha^R] = [B_\alpha^L,\ B_\alpha^R]$$

$$[A_\alpha^L,\ A_\alpha^R] \wedge [B_\alpha^L,\ B_\alpha^R] = [A_\alpha^L \wedge B_\alpha^L,\ A_\alpha^L \wedge B_\alpha^R] = [A_\alpha^L,\ A_\alpha^R]$$

$$A \leq B \quad \text{iff} \quad A_\alpha^L \leq B_\alpha^L,\ A_\alpha^R \leq B_\alpha^R \quad (0 < \alpha \leq 1) \quad (2')$$

A,Bのαレベル集合の区間表示$[A_\alpha^L, A_\alpha^R]$,$[B_\alpha^L, B_\alpha^R]$を用いて書き直したものが(2’)式である．(2’)式からわかるように問題としているのは各要素に対する所属度の間の大小関係(つまり集合の包含関係)ではないことに注意されたい．また以降はとくに断らない限り$A \leq B$と仮定して議論を行う．

【条件3】は以上集合と以下集合の導入に関するものである．例えばA_1^L以下のAの所属度をAとBの“間”を求めるときにそのまま用いると，“AでもBでもない”も一緒に求めてしまうことになる．人は対象の位置などの情報を使ってこの二つを区別していると考えられる．この人の弁別機能の近似として，**図1**に示したようにA_1^L以下の所属度を1に置き換えて，Aの所属度の減少に伴って“AでもBでもない”の所属度が増加するのを抑制している．B_1^R以上も同様である．これは二つの集合をそれぞれA以下を表す集合(A以下集合，$\leq A$と表記)とB以上を表す集合(B以上集合，$\geq B$と表記)に置き換えることに当り，これらはファジィ数における可能的に等しいか小さい(あるいは大きい)数の定義[5]に一致する．この条件は後に述べるBetween集合の凸性を保証するために必要となる．

2.2 Between 集合の定義

前節の条件のもとで二つのファジィ集合の“間”を表現する Between 集合を定義する．ただしここで扱う“間”は二つの対象の“間”に限定している．二つの対象の“間”というのは，二つの対象のいずれに属するか判断し難い状態であると考える．これに従えば，二つのファジィ集合の“間”を表す集合の所属度は，二つのファジィ集合の所属度に差がなければないほど1に近づくことになる．この要求を満たすものの一つを Between 集合と名付け，(3)式のように定義し[6]，その計算例を図1に示した．

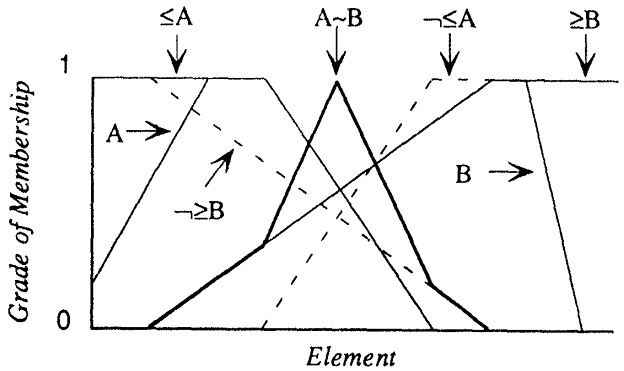


図1 元となるファジィ集合の関係と Between 集合の定義

【定義】

$$\mu_{A\sim B}(x) \equiv 1 - |\mu_{\leq A}(x) - \mu_{\geq B}(x)| \qquad (3)$$

ここで $x \in X$ (X は全体集合)である．つまり A と B の Between 集合($A \sim B$ と表記)は A 以下，B 以上集合の所属度の差の絶対値を1から減じたものとして表される．また補集合を用いて(3)式を変形すると(4)式が得られる．

$$\mu_{A\sim B}(x) \equiv$$
$$min\ \{\mu_{\neg\leq A}(x) \oplus \mu_{\geq B}(x),\ \mu_{\leq A}(x) \oplus \mu_{\neg\geq B}(x)\} \qquad (4)$$

ただし

$$1-\mu_{\leq A}(x) = \mu_{\neg\leq A}(x),\ 1-\mu_{\geq B}(x) = \mu_{\neg\geq B}(x)$$
$$\mu_{\neg\leq A}(x) \oplus \mu_{\geq B}(x) = min(1,\ \mu_{\neg\leq A}(x) + \mu_{\geq B}(x))$$

上式中の$\oplus$は限界和を表す．A,B が type - I ファジィ集合である場合には算術和でも十分であるが，type - IIの場合には上限を1に制限するために限界和を用いる必要がある．したがって厳密には(3)式も A,B が type - IIの場合には算術差を限界差(下限を0で抑えたもの)に置き換えなければならない．また(4)式を見ると，“間”に属する程度はある集合に属する程度ともう一方の集合に属さない程度の和であると解釈することもできる．

3. Betweeen 集合の性質

本章では Between 集合を応用する上で重要と思われる数学的な性質について説明する．本文中では**表2**に示した性質の表す意味を中心に述べ，性質の数学的な証明は付録に含めた．

表2 Between 集合の性質

	内　容
性質1	Between 集合の形状 1) Between 集合は空集合にならない 2) Between 集合は凸集合である
性質2	全体集合上の要素の表現力 $\mu_{\leq A(x)} \vee \mu_{A\sim B}(x) \vee \mu_{\geq B(x)} \geq 0.5$
性質3	元の集合との大小関係 $A \leq A\sim B \leq B$
性質4	集合間の包含関係 $A \cap B \subseteq A\sim B \subseteq Convex(A \cup B)$

【性質1】は Between 集合の形状に関する二つのものからなる．1)は元の集合の関係によらず，Between 集合は空集合にならないという性質である．また空集合にならないだけでなく，正規ファジィ集合になることが(3)式からわかる．この元の集合の関係というのは，二つのファジィ集合の所属度が等しくなる要素 $x_{A=B}$ における値 $\mu(x_{A=B})$ のことを指している．つまりこの性質はいろいろなレベルの“間”を同一の式で統合的に表現できることを意味している．また Between 集合の正規性については4章で触れる．

ところで統合的な表現の欠点は，Between 集合だけでは元の二つの集合の関係がわからないことである．つまりそれらが0～1の間のどの程度の所属度で一致したのかは不明である．しかし条件1にもあるように，元になる集合が両方とも既知で

あればこの問題は生じない．問題となるのはBetween集合と他のファジィ集合の間でBetween集合を求めた場合である．形式的には求めることはできるが，応用する際にそれが意味をもつか十分に検討する必要がある．

2)はBetween集合が凸集合であるという性質である．これは条件3により保証されるものである．Between集合が凸集合になることは，多義でない集合の“間”の集合も多義にならないことを意味している．

【性質2】は全体集合上の要素の表現力に関するものである．

$$\mu_{\leq A}(x) \vee \mu_{A\sim B}(x) \vee \mu_{\geq B}(x) \geq 0.5 \qquad (5)$$

(5)式は全体集合上の任意の要素はA以下，B以上あるいはBetween集合のいずれかに必ず0.5以上の所属度で属することを表している．0.5を“属するか属さないかわからない”を意味すると考えると，どの要素も何等かの程度でどれかの集合に属するといえることを示している．

【性質3】は元の二つの集合との大小関係に関するものである．

$$A \leq A\sim B \leq B \qquad (6)$$

三者の大小関係は(6)式のようになり，A,BのBetween集合がAとBの間に存在することを保証する．これは集合間の大小関係を条件2によって規定したことにより導かれる．この大小関係を三つの集合に拡張すると推移性が導かれる．三つのファジィ集合の間に$A \leq B \leq C$という関係があるとすると(7)式が成立する．

$$A\sim B \leq B\sim C \qquad (7)$$

【性質4】は集合間の包含関係に関するものである．

$$A \cap B \subseteq A\sim B \subseteq Convex(A \cup B) \qquad (8)$$

(8)式および**図2**に示したように，Between集合はAとBの論理積集合$A \cap B$を含み，論理和集合を凸化した集合$Convex(A \cup B)$に含まれることがわかる．後者は“AからBまで”を表す集合[7]と解釈できるので，この性質は“AかつB”よりも“AとBの間”の方が表す範囲が広く，それよりも“AからBまで”の方が広いという我々の常識とも一致している．

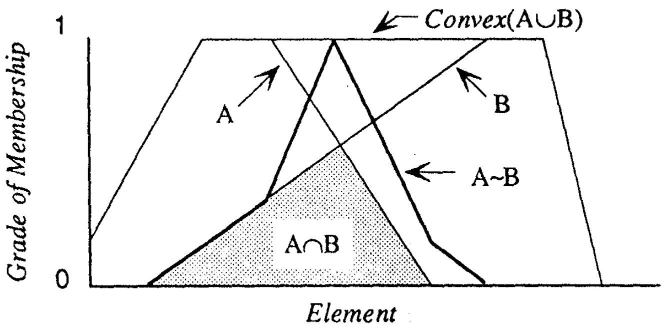


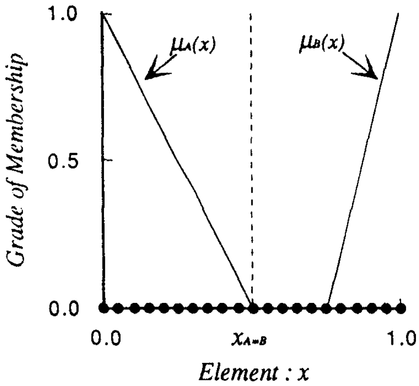
図2　合成集合間の包含関係

4. Between集合と他の演算により得られる“間”の集合との比較

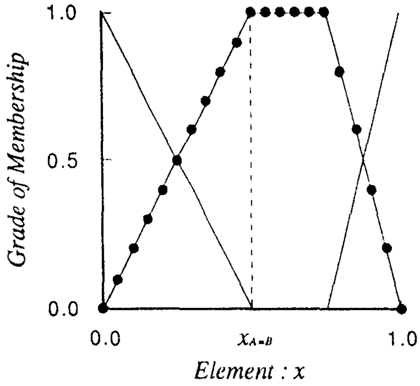
本章では二つのファジィ集合にいろいろな演算を施すことによって得られる“間”を表す集合とBetween集合を比較して，Between集合のもつ特徴を明かにする．

まずシミュレーションの条件について説明する．全体集合として[0,1]を0.05間隔でサンプリングした21点からなる離散集合を用いた．二つのファジィ集合は2章の条件を満たすものとして，単調減少型(集合A)と単調増加型(集合B)を選んだ．**図3**に示したように，Aは傾きが−2に，Bは4に設定されている．二つの集合の関係を表すパラメータとして前出の$\mu(x_{A=B})$を用いた．シミュレーションでは$x_{A=B}$を0.5に固定し，$\mu(x_{A=B})$が0.0，0.2，0.4，0.6，0.8，1.0となるように二つの集合を全体集合上で平行移動させた．演算はAおよびBとそれらの否定集合のうち二つないし四つを論理積，代数積などによって組み合せて得られる30種の中から，重複するものや明かに“間”を表すのに不適切と判断されるものを除いた8種を用いた．それらを**表3**に示した．

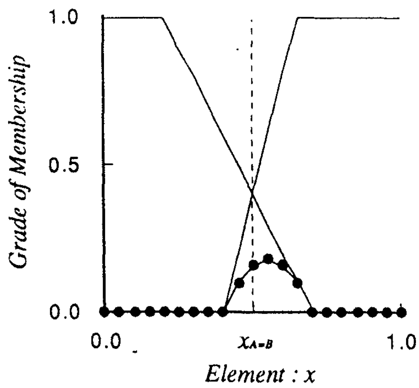
図3には論理積型，max-min型，Between集合の3種類について，それぞれ$\mu(x_{A=B})=0.0$,



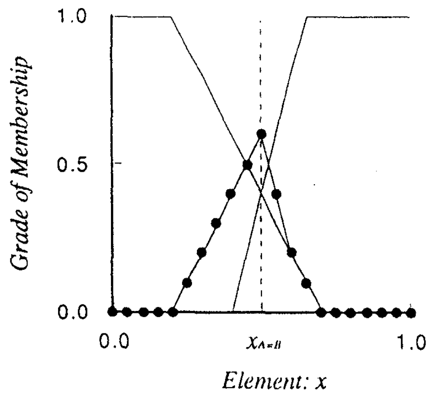
1-a) $\mu(x_{A=B})=0.0$ のときの $\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)$ の形状



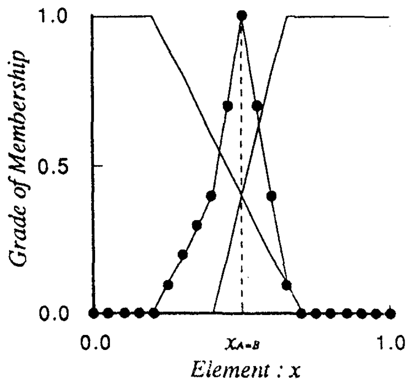
1-b) $\mu(x_{A=B})=0.0$ のときの $\{\mu_A(x)\wedge\mu_B(x)\}\vee\{\mu_{\neg A}(x)\wedge\mu_{\neg B}(x)\}$, $1-|\mu_A(x)-\mu_B(x)|$ の形状



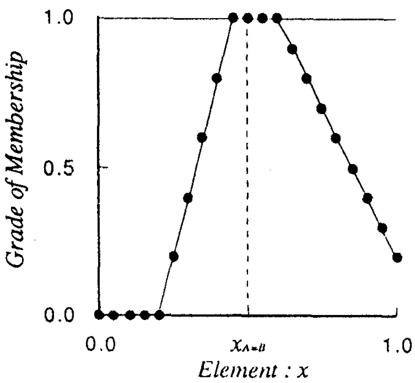
2-a) $\mu(x_{A=B})=0.4$ のときの $\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)$ の形状



2-b) $\mu(x_{A=B})=0.4$ のときの $\{\mu_A(x)\wedge\mu_B(x)\}\vee\{\mu_{\neg A}(x)\wedge\mu_{\neg B}(x)\}$ の形状



2-c) $\mu(x_{A=B})=0.4$ のときの $1-|\mu_A(x)-\mu_B(x)|$ の形状



3) $\mu(x_{A=B})=1.0$ のときの $\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)$, $\{\mu_A(x)\wedge\mu_B(x)\}\vee\{\mu_{\neg A}(x)\wedge\mu_{\neg B}(x)\}$, $1-|\mu_A(x)-\mu_B(x)|$ の形状

図3 種々の演算によって得られる"間"を表現する集合の例

0.4，1.0のときの求められたファジィ集合を示してある．この max-min 型は二つの集合の weak equality を表すとされている[8]．黒丸で示したデータ点間を直線で結ぶことは演算によっては正しくないが，得られた集合の形状がわかりやすいようにすべて結んで示した．$\mu(x_{A=B})=0.4$のときの結果を見ると，Between 集合以外の二つの集合は正規ファジィ集合になっていないことがわかる．

さらに$\mu(x_{A=B})$の最大所属度に与える影響を詳しく検討するために，$\mu(x_{A=B})$に対する各演算の$x_{A=B}(=0.5)$(図 3 中の破線)における所属度を示したのが**図 4** である．ただし図が繁雑になるのを避けるため，否定集合に対する論理積型，代数積型演算の結果は示していない．演算の中には$x_{A=B}$で所属度が最大にならないものもあるが，変化の傾向を捉えるのには十分と判断した．またこの図でも図 3 と同様の理由からデータ点間を直線で結んでいる．図から論理積型などの二つのファジィ集合を使って得られる集合の所属度が$\mu(x_{A=B})$に対して単調増加(あるいは減少)すること，また Between 集合を除く演算で四つのものを使って得られるものが凹状の変化を示すことが見て取れる．これに対し全体集合が離散的であっても$x_{A=B}$が存在すれば，Between 集合は性質 1 で示したように常に 1 すなわち正規ファジィ集合となる．このことは Between 集合は二つの所属度の差つまり相対的な関係だけの影響を受けることのに対して，これ以外のものでは論理積や代数積などの演算を用いているために元のファジィ集合の所属度そのものの影響を直接受けるためである．実際の応用では正規化ファジィ集合が必要となることが多いが，他の演算による“間”の表現では正規ファジィ集合を得るために正規化演算子を用いる必要がある．これは集合の表す意味を変化させることになり好ましいとはいえない．このことからも Between 集合が“間”の統合的な表現として優れていることが理解できる．

表 3　シミュレーションに用いた演算

名称	計算式
論理積型 (*min*)	$\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$ $\mu_{\neg A}(x) \wedge \mu_{\neg B}(x)$
代数積型	$\mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$ $\mu_{\neg A}(x) \cdot \mu_{\neg B}(x)$
*max-min*型	$\{\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)\} \vee \{\mu_{\neg A}(x) \wedge \mu_{\neg B}(x)\}$
max-代数積型	$\{\mu_A(x) \cdot \mu_B(x)\} \vee \{\mu_{\neg A}(x) \cdot \mu_{\neg B}(x)\}$
限界和-代数積型	$\{\mu_A(x) \cdot \mu_B(x)\} \oplus \{\mu_{\neg A}(x) \cdot \mu_{\neg B}(x)\}$
Between集合	$1-\lvert\mu_A(x)-\mu_B(x)\rvert$

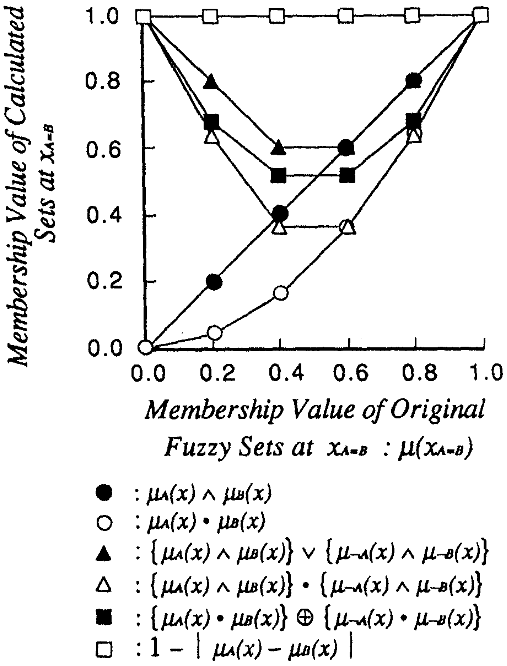


図 4　各演算により得られた所属度の$\mu(x_{A=B})$に対する変化

5. 応用における Between 集合の役割

本章では実際に用いられているファジィ集合あるいはファジィ数の中で Between 集合の定義を満たすものを取り上げ，Between 集合の応用における重要性を示す．

例としてファジィ制御(推論)で用いられるファジィ変数を取り上げる．通常よく用いられているファジィ変数は三角形型のファジィ数を平行移動

させ，台集合上で

$$\sum_i \mu_i(x)=1 \tag{9}$$

という直交条件[8]を満たすように選択されることが多い．また水本[9]はファジィ制御の前件部の三角形型のファジィ数の幅を変化させて最適な制御が得られる条件について考察し，式(9)の条件を満たすものが最適であることを示している．このようにファジィ制御で重要な意味をもつ直交するファジィ数群には，その中の隣接する三つのファジィ数を考えると，その中央のファジィ数が両隣の Between 集合になっているという性質がある．従って，制御システムで入出力のファジィ数が直交するならば，すべてのファジィ数を記憶させておく必要はなく一つおきに記憶させておけば合成することができる．

また入力空間をファジィ数で分割する場合に，max-min 演算で推論を行うためには，すべての要素に対してグレードが 0.5 以上となることが望ましいとされている[10]．仮にそのシステムの入力分割がこの条件を満たしていないとする．このときその条件を満たしていない要素に対して一番大きなグレードをもつものと二番目のものとの間で Between 集合を求めてやると，性質 2 より上記の条件を満たすような入力分割が得られることがわかる．

またノンエンジニアリング分野への応用としては，尺度構成法の改善に Between 集合を用いた例が報告されている[11]．嗜好や態度などの人間の主観的な評価の測定法の一つに評価カテゴリーと呼ばれる評価する属性の程度を言葉で表現した目盛(例えば，非常に多いなど)を用いた評定尺度法がある．この方法では測定対象がその属性をもつ程度はカテゴリーを選択することにより回答される．このカテゴリーは評価属性の程度という全体集合上で定義されたファジィ集合とみなすことができる．ところがいわゆる物理的な測定で用いるものさしの目盛とは異なり，**図 5** の上図のように各評価カテゴリーのメンバシップ関数の形状によっては，二つのカテゴリーの所属度 1 に相当する部分が重なったり，逆にどちらへの所属度も低い部分が生じることがある．これらの部分に対応する対象を回答する場合，どちらか一方のカテゴリーを選択することは困難である．このような場合に下図に示したようにカテゴリー間の Between 集合を求めて「二つの“間”」という回答も認めてやれば，被験者の回答時の強制判断にともなう負担を軽減することができる．

ここには応用の一例を示したが，今後さらにいろいろな分野への応用がなされるものと思われる．

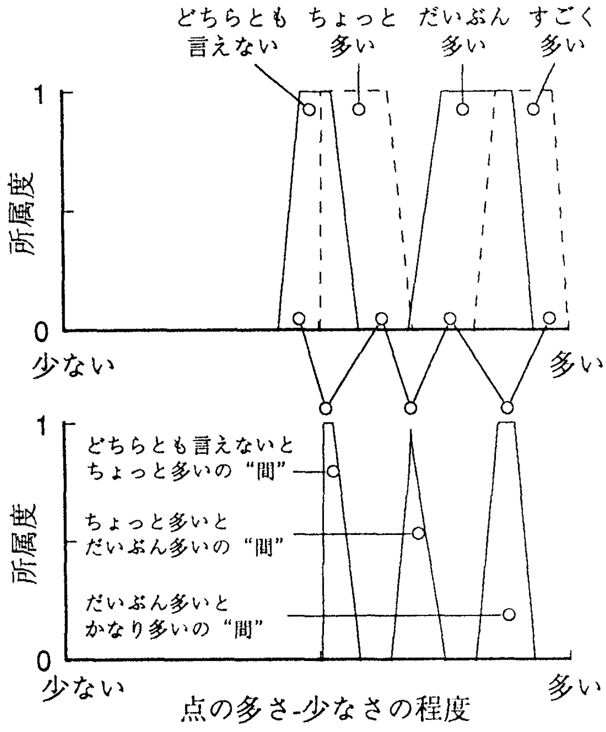


図 5　Between 集合による心理尺度の改善

6. むすび

本論文では自然言語を扱う上で非常に重要であるファジィ集合の“間”を表現する集合を二つのファジィ集合の差にもとづいて定義し，この“間”の表現から導かれる代表的な性質を示した．とくに性質 1 の凸性や正規性あるいは性質 2 の要素の表現力に関するものが応用上非常に重要であることは，5 章で例を用いて明かにした．またシミュレーション通して，筆者の提案する“間”を表現する集合が正規化演算子が不要であるという優れた

特徴をもつことも示した．さらに本論文では紙幅の都合上報告できなかったが，Between集合による“間”の表現と心理的な“間”の判断が矛盾しないという結果も報告されている[12]．

今後の課題としては，Between集合を実際に用いてその有効性を示すことは言うまでもないが，それとともにBetween集合を定義するに当って満たすべき条件の緩和が挙げられる．全体集合に全順序関係が存在しない場合への拡張は文献[6]でも試みられているが，完全なものとはいえない．この問題は実際の応用という意味でも抽象概念の取扱という意味でも重要な課題であると考える．

謝辞

本研究を進める上でご指導いただきました京都工芸繊維大学工芸学部の西村武教授と森本一成氏に謝意を表します．

参考文献

[1]菅野，ファジィ理論の展開，サイエンス社，1989

[2]Zadeh,Fuzzy Sets, Information and Control, 338-356,1965

[3]ウォルドロン(築島訳)，意味と意味の発展，法政大学出版局，1990

[4]水本，拡張原理とファジィ数，講習会「ファジィ理論の基礎」テキスト，57-72，1990

[5]坂和，ファジィ理論の基礎と応用，森北出版，1989

[6]吉川，Between集合の性質に関する一考察，第7回ファジィシステムシンポジウム予稿集，525-528，1991

[7]シュマッカー(鬼沢訳)，ファジィ集合，啓学出版，1990

[8]Dubois and Prade,Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications,Academic Press, 1980

[9]水本，ファジィ制御の改善法(III)，第5回ファジィシステムシンポジウム予稿集，499-504，1989

[10]横井，ファジィ制御とソフトファジィコン入門，ラジオ技術社，1990

[11]吉川・西村，MUSCAT(多重尺度図法)による心理尺度の構成，第7回ヒューマン・インタフェース・シンポジウム講演論文集，147-152，1991

[12]吉川，Between集合の性質について，第1回SOFT ANGLE研究発表会講演論文集，66-67，1991

付録　性質の数学的証明

【性質1-2】Between集合は凸集合である

[証明]$x_1 < x_3 < x_2$とすると，凸集合の条件は次の関係が成立することである[2]．

$$\mu_{A\sim B}(x_3) \geq \mu_{A\sim B}(x_1) \wedge \mu_{A\sim B}(x_2)$$

$$\begin{aligned}&\mu_{A\sim B}(x_1) \wedge \mu_{A\sim B}(x_2)\\ &=\{\mu_{\leq A}(x_1) \oplus \mu_{\neg\geq B}(x_1)\} \wedge \{\mu_{\neg\leq A}(x_1) \oplus \mu_{\geq B}(x_1)\}\\ &\wedge\{\mu_{\leq A}(x_2) \oplus \mu_{\neg\geq B}(x_2)\} \wedge \{\mu_{\neg\leq A}(x_2) \oplus \mu_{\geq B}(x_2)\}\\ &=\{\mu_{\leq A}(x_2) \oplus \mu_{\neg\geq B}(x_2)\} \wedge \{\mu_{\neg\leq A}(x_1) \oplus \mu_{\geq B}(x_1)\}\\ &\mu_{A\sim B}(x_3)\\ &=\{\mu_{\leq A}(x_3) \oplus \mu_{\neg\geq B}(x_3)\} \wedge \{\mu_{\neg\leq A}(x_3) \oplus \mu_{\geq B}(x_3)\}\end{aligned}$$

A以下集合とB以上集合にはそれぞれ次の関係が成立する．

$$\mu_{\leq A}(x_1) \geq \mu_{\leq A}(x_3) \geq \mu_{\leq A}(x_2)$$
$$\mu_{\neg\leq A}(x_1) \leq \mu_{\neg\leq A}(x_3) \leq \mu_{\neg\leq A}(x_2)$$
$$\mu_{\geq B}(x_1) \leq \mu_{\geq B}(x_3) \leq \mu_{\geq B}(x_2)$$
$$\mu_{\neg\geq B}(x_1) \leq \mu_{\neg\geq B}(x_3) \leq \mu_{\neg\geq B}(x_2)$$

$$\mu_{\leq A}(x_3) \oplus \mu_{\neg\geq B}(x_3) \geq \mu_{\leq A}(x_2) \oplus \mu_{\neg\geq B}(x_2)$$
$$\mu_{\neg\leq A}(x_3) \oplus \mu_{\geq B}(x_3) \geq \mu_{\neg\leq A}(x_1) \oplus \mu_{\geq B}(x_1)$$

が成立する．よって

$$\mu_{A\sim B}(x_3) \geq \mu_{A\sim B}(x_1) \wedge \mu_{A\sim B}(x_2)$$

□

【性質2】全体集合上の任意の要素はA以下，B以上あるいはBetween集合のいずれかに必ず0.5以上の所属度で属する

$$\mu_{\leq A}(x) \vee \mu_{A\sim B}(x) \vee \mu_{\geq B}(x) \geq 0.5$$

[証明]

$$\begin{aligned}&\mu_{\leq A}(x) \vee \mu_{A\sim B}(x) \vee \mu_{\geq B}(x)\\ &=\mu_{\leq A}(x) \vee \{\{\mu_{\leq A}(x) \oplus \mu_{\neg\geq B}(x)\}\end{aligned}$$

$\wedge\ \{\mu_{\neg\leq A}(x)\oplus\mu_{\geq B}(x)\}\}\ \vee\mu_{\geq B}(x)$

$=\{\mu_{\leq A}(x)\vee\{\mu_{\leq A}(x)\oplus\mu_{\neg\geq B}(x)\}\vee\mu_{\geq B}(x)\}$

$\wedge\ \{\mu_{\leq A}(x)\vee\{\mu_{\neg\leq A}(x)\oplus\mu_{\geq B}(x)\}\vee\mu_{\geq B}(x)\}$

と変形される．一方，

$\mu_{\leq A}(x)\vee\mu_{\neg\leq A}(x)\geq 0.5$

$\mu_{\geq B}(x)\vee\mu_{\neg\geq B}(x)\geq 0.5$

は常に成り立ち[8]，これより

$\mu_{\leq A}(x)\vee\ \{\mu_{\leq A}(x)\oplus\mu_{\neg\geq B}(x)\}\ \vee\mu_{\geq B}(x)$

$=\ \{\mu_{\leq A}(x)\oplus\mu_{\neg\geq B}(x)\}\ \vee\mu_{\geq B}(x)\geq 0.5$

$\mu_{\leq A}(x)\vee\ \{\mu_{\neg\leq A}(x)\oplus\mu_{\geq B}(x)\}\ \vee\mu_{\geq B}(x)$

$=\mu_{\leq A}(x)\vee\ \{\mu_{\neg\leq A}(x)\oplus\mu_{\geq B}(x)\}\ \geq 0.5$

よって

$$\mu_{\leq A}(x)\vee\mu_{A\sim B}(x)\vee\mu_{\geq B}(x)\geq 0.5$$

□

【性質3】集合 A と B の間に $A\leq B$ という関係があるとき，Between 集合は $A\ \leq\ A\sim B\ \leq\ B$ を満たす．つまり A と B の間にある

$A_\alpha^L\leq A\sim B_\alpha^L\leq B_\alpha^L$，$A_\alpha^R\leq A\sim B_\alpha^R\leq B_\alpha^R$
ただし $0<\alpha\leq 1$

[証明] $A_\alpha^L\leq A\sim B_\alpha^L\leq B_\alpha^L$ の場合について示す．
$A_\alpha^L\leq A\sim B_\alpha^R\leq B_\alpha^R$ の場合も同様にできる．

・$A_\alpha^L\leq A\sim B_\alpha^L$

$A_\alpha^L\leq A_1^L$ は常に成立する．$A_1^L\leq A\sim B_\alpha^L$ ならば $A_\alpha^L\leq A\sim B_\alpha^L$ は明かに成り立つ．

$A\sim B_\alpha^L\leq A_1^L$ ならば $\mu_{\leq A}(A\sim B_\alpha^L)=1$ となり，Between 集合の定義から $A\sim B_\alpha^L=B_\alpha^L$．一方【条件2】より，$A_\alpha^L<B_\alpha^L$．
ゆえに $A_\alpha^L\leq A\sim B_\alpha^L$ を満たす．

・$A\sim B_\alpha^L\leq B_\alpha^L$

$x_{A=B}<B_\alpha^L$ の範囲では $A\sim B_\alpha^L\leq x_{A=B}$ より，$A\sim B_\alpha^L\leq B_\alpha^L$ は常に成立する．

$B_\alpha^L\leq x_{A=B}$ の範囲では $1-\mu_A(B_\alpha^L)\geq 0$．

$\mu_{A\sim B}(B_\alpha^L)=1-\mu_A(B_\alpha^L)+\mu_B(B_\alpha^L)$
$=1-\mu_A(B_\alpha^L)+\alpha$
$\geq\alpha$

$A\sim B$ は凸集合であるから $\mu_{A\sim B}(B_\alpha^L)\geq\alpha$ ならば，$A\sim B_\alpha^L\leq B_\alpha^L$ でなければならない．
ゆえに $A\sim B_\alpha^L\leq B_\alpha^L$ を満たす．

□

【性質4】1) A と B の Between 集合は，“A かつ B”の集合と等しいかあるいはそれを含む

$$A\cap B\subseteq A\sim B$$

[証明]

$$\mu_{\leq A}(x)\wedge\mu_{\geq B}(x)\geq\mu_A(x)\wedge\mu_B(x)$$

より，$A\cap B\subseteq(\leq A)\cap(\geq B)$ が成り立つ．また $\mu_{\neg\leq A}(x)$，$\mu_{\neg\geq B}(x)\geq 0$ より

$\{\mu_{\leq A}(x)\oplus\mu_{\neg\geq B}(x)\}\wedge\{\mu_{\neg\leq A}(x)\oplus\mu_{\geq B}(x)\}$
$\geq\mu_{\leq A}(x)\wedge\mu_{\geq B}(x)$

となり，$(\leq A)\cap(\geq B)\subseteq A\sim B$ が成立する．
ゆえに $A\cap B\subseteq A\sim B$ が成り立つ．

□

2) A と B の Between 集合は A または B を凸化した集合(“A から B”を表す集合)と等しいかあるいはそれに含まれる

$$A\sim B\subseteq Convex(A\cup B)$$

[証明] $A\sim B$ と $Convex(A\cup B)$ の所属度を次のように表す．

$$\mu_{Convex(A\cup B)}(x)=\begin{cases}\mu_A(x) & x\leq A_1^L\\ 1 & A_1^L<x<B_1^R\\ \mu_B(x) & B_1^R\leq x\end{cases}$$

$$\mu_{A\sim B}(x)=\begin{cases}\mu_B(x) & x\leq A_1^L\\ 1-\{\mu_A(x)-\mu_B(x)\} & A_1^L<x<x_{A=B}\\ 1 & x=x_{A=B}\\ 1-\{\mu_B(x)-\mu_A(x)\} & x_{A=B}<x<B_1^R\\ \mu_A(x) & B_1^R\leq x\end{cases}$$

$A_1{}^L < x < B_1{}^R$ で $\mu_{A\sim B}(x) \leq \mu_{Convex(A\cup B)}(x)$ が成立するのは明か．

$x \leq A_1{}^L$ のときは $A_1{}^L < B_1{}^L$ より，$\mu_B(x) \leq \mu_A(x)$ となり，成立する．

また $B_1{}^R \leq x$ のときも $A_1{}^R < B_1{}^R$ より，$\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ となり，成立する．

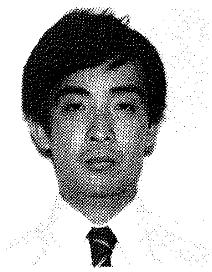
ゆえに $A \sim B \subseteq Convex(A \cup B)$ が成り立つ．

□

(1991年　7月19日 受付)

[問い合わせ先]
〒606 京都市 左京区 松ケ崎 御所海道町
京都工芸繊維大学 工芸学部
電子情報工学科 西村研究室
吉川 歩
TEL 075-791-3211(内)673
FAX 075-723-2853(電子情報工学科)
E-Mail:ayumi@dj.kit.ac.jp

著者紹介



吉川　歩（よしかわ あゆみ）

京都工芸繊維大学大学院 工芸科学研究科 博士後期課程 情報・生産科学専攻

昭和62年京都工芸繊維大学工芸学部電気工学科卒業．平成元年同大学院工芸学研究科電気工学専攻修了．同年同大学院工芸科学研究科博士後期課程入学．現在に至る．ファジィ理論を用いた評定尺度法の改善およびファジィ集合による言語や概念の表現法の研究に従事．日本ファジィ学会，電子情報通信学会などの会員．